11 класс

11.1. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$ рациональны?

(*В. Сендеров*)

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим противное. Тогда число $A = \cos\alpha+\cos 5\alpha$ иррационально как сумма рационального и иррационального; с другой стороны, $A = 2\cos 2\alpha\cos 3\alpha$ рационально как произведение трёх рациональных чисел. Противоречие.

Замечание. Если убрать из условия $\cos 5\alpha$, то ответ будет другим. Например, при $\alpha = \pi/6$ число $\cos\alpha$ иррационально, а числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha$ рациональны.

С другой стороны, из решения видно, что $\cos 4\alpha$ можно удалить из условия безболезненно.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

(*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Решение. Предположим, что среди данных чисел четное количество отрицательных. Тогда среди них есть положительное число a, и произведение всех чисел, кроме a, положительно. Это противоречит условию.

Значит, среди данных чисел нечетное число отрицательных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — две группы, на которые разбиты данные числа ($k + m = 2011$). Ровно одно из двух произведений $x_1x_2\ldots x_k$ и $y_1y_2\ldots y_m$ (а именно то, в котором нечётное число отрицательных сомножителей) — отрицательно; пусть для определенности $x_1x_2\ldots x_k < 0$, $y_1y_2\ldots y_m > 0$. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найдется отрицательное, скажем, $x_1 < 0$. Отсюда $x_2\ldots x_k > 0$, а значит, $x_2\ldots x_k \geqslant 1$ (так как данные числа целые). Следовательно, $x_1x_2\ldots x_k + y_1y_2\ldots y_m \leqslant$

$\leqslant x_1 + y_1y_2 \ldots y_m \leqslant x_1 + y_1y_2 \ldots y_m x_2 \ldots x_k$. Но по условию $x_1 + y_1y_2 \ldots y_m x_2 \ldots x_k < 0$.

Замечание. Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное, и его модуль больше произведения всех остальных.

Комментарий. Доказано, что среди данных чисел нечетное число отрицательных — 2 балла.

11.3. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD. (*В. Шмаров*)

Решение. Отметим на продолжении отрезка AD такую точку T, что $AT = DM$. Тогда прямоугольные треугольники CDM и BAT равны, а значит, $BT \parallel CM$. Заметим, что $DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM$. По теореме Фалеса, прямая CM пересекает отрезок BD в точке N такой, что $DB = 4DN$. Значит, $DN = NO$, то есть KN — медиана треугольника OKD.

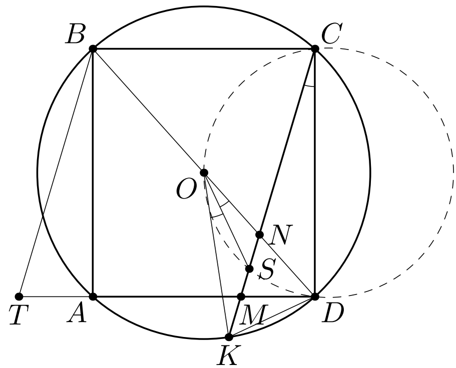

Рис. 4

Пусть S — точка пересечения медиан треугольника OKD. Поскольку $OD = OK$, точка S лежит на биссектрисе угла KOD, и $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD$. С другой стороны, вписанный угол KCD равен половине центрального угла KOD, откуда $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD = \angle SCD$. Это и означает, что точки S, D, O, C лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что прямая KC делит отрезок OD пополам — 2 балла.

11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

(*Р. Карасёв*)

Ответ. За 2010 рейсов.

Решение. Покажем вначале, что за 2009 рейсов план выполнить удастся не всегда. Пусть (при произвольной схеме дорог) изначально весь цемент расположен на одном складе S, а распределить его нужно по всем складам поровну. Тогда на каждый склад, кроме S, нужно в каком-нибудь рейсе цемент завезти; ясно, что такие 2010 рейсов различны, поэтому всего рейсов должно быть не меньше 2010.

Нам осталось показать, что за 2010 рейсов план всегда удастся выполнить. Мы докажем индукцией по n, что при n складах всегда удастся обойтись $n-1$ рейсом. База при $n=1$ очевидна.

Пусть $n > 1$. Так как с любого склада можно добраться до любого другого, то существует маршрут, проходящий по всем складам (может быть, неоднократно). Рассмотрим любой такой маршрут и склад A, который впервые появился на этом маршруте позже всего. Тогда, если удалить склад A и все дороги, ведущие из него, то по-прежнему от любого склада до любого другого можно добраться (по предыдущим дорогам маршрута).

Можно считать, что A — склад с номером n. Если $y_n \leqslant x_n$, то вывезем из A на любой соединённый с ним склад $x_n - y_n$ кг цемента, а после этого забудем про него и про все дороги, из него ведущие. По предположению индукции, для оставшихся складов можно выполнить план за $(n-1)-1$ рейс. В итоге через $(n-2)+1$ рейс получится требуемое распределение цемента.

Если же $y_n > x_n$, то мы уже доказали, что из распределения, когда на i-м складе находится y_i кг, можно получить распределение, когда на i-м складе находится x_i кг, за $n-1$ рейс. Проведя теперь все эти перевозки в обратном порядке (и обратном направлении), мы осуществим требуемый план.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только предъявлен пример, показывающий, что за 2009 рейсов план выполним не всегда — 2 балла.

Доказано только, что 2010 рейсов хватит всегда — 5 баллов.